

***“APLICACIÓN DE LOS EXPERTONES A LA
REPRESENTACIÓN CON 2-TUPLAS LINGÜÍSTICAS
PARA LA VALORACIÓN DE EMPRESAS EN
AMBIENTE DE INCERTIDUMBRE”***

Mendaña Cuervo, Cristina

López González, Enrique

E-mail: dde{cmc, elg}@unileon.es

Universidad de León. Facultad de CC. EE. y Empresariales.

Departamento de Dirección y Economía de la Empresa

Campus de Vegazana, s/n. E-24071 León (España)

Palabras clave: Valoración de Empresas en Condiciones de Incertidumbre, Información Lingüística, Algoritmos de Agregación, 2-tuplas, Expertones

Resumen

En el presente trabajo se plantea la posibilidad de afrontar la valoración económico-financiera de una empresa cuando la información disponible es obtenida mediante la opinión emitida por expertos. En estas circunstancias, parece más adecuado solicitar dicha información mediante etiquetas lingüísticas que en valores numéricos ciertos, siendo preciso por tanto un acercamiento a aquellas herramientas que permitan operar con este tipo de información.

De acuerdo con lo anterior, en el trabajo se analiza la posibilidad de representar dicha información mediante 2-tuplas lingüísticas, lo que facilita asimismo la operativa con información suministrada en distintos dominios de expresión. Por otra parte, y dados los buenos resultados obtenidos con la técnica de los expertones, en el trabajo se analiza la posibilidad de su aplicación conjunta con la representación mediante 2-tuplas, en concreto en su utilización en el modelo de valoración de empresas.

1. Introducción

La necesidad de valorar una empresa está presente en muchas circunstancias, asociadas generalmente a procesos de compra, fusiones, absorciones, etc. en las que se hace preciso establecer un precio de compraventa que sea aceptado por las partes que intervienen en el proceso.

Sin embargo, no resulta factible establecer un criterio estandarizado que sea útil en cualquier caso, dado que cada operación es en sí misma diferente al resto. De ahí que normalmente la determinación del valor de una empresa se encuentre ligado a un proceso de negociación entre las partes si bien es posible establecer mecanismos que faciliten la convergencia a un acuerdo común. En muchos casos, dichos mecanismos vienen establecidos por las opiniones solicitadas a expertos en el tema que facilitan encontrar un campo común sobre el que las partes interesadas poder negociar hasta llegar a un acuerdo que satisfaga a ambos.

En las condiciones anteriores se plantea la necesidad de habilitar mecanismos que permitan operar con la incertidumbre inherente a las opiniones expresadas por personas que normalmente vendrán definidas en valores lingüísticos.

De ahí que en el segundo apartado de este trabajo se plantee un acercamiento al proceso de valoración de empresas, estableciendo la formulación que servirá de base para el desarrollo del resto del trabajo, en el que se pretende examinar la posibilidad de operar con información lingüística.

En consecuencia en el tercer apartado se realiza una aproximación al concepto de variable lingüística y a los modelos que abordan el tratamiento de información expresada en estos términos, tanto los modelos basados en el principiado de extensión como los modelos simbólicos. Este análisis permitirá poner de manifiesto las deficiencias de ambos en el tratamiento de información lingüística tanto cuando se precisa establecer los resultados en el dominio de expresión original como cuando dicha información se encuentra dada en distintos dominios de expresión (información multigranular).

Estas limitaciones han suscitado el interés por el análisis de la representación de la información mediante 2-tuplas lingüísticas que será objeto de estudio en el cuarto apartado, haciendo especial mención tanto a la formulación de este tipo de representación como a los operadores existentes para este tipo de representación al objeto de facilitar su utilización en el problema que se pretende abordar en el presente trabajo.

Para finalizar, en el quinto apartado y en base a las consideraciones efectuadas en los apartados precedentes, se realizará un ejemplo de aplicación de las posibilidades de la representación mediante 2-tuplas lingüísticas para la valoración de empresas cuando la información disponible se encuentra expresada en etiquetas lingüísticas y en distintos dominios de expresión (información multigranular). Asimismo y ante la necesidad de someter dicha información a procesos de agregación se plantea la posibilidad de utilización conjunta de este tipo de representación con la técnica de los expertones planteada por los Prof. Kaufmann y Gil Aluja.

Los resultados obtenidos permitirán en el sexto apartado establecer las consideraciones finales a modo de conclusión del presente trabajo.

2. Valoración de Empresas

La acepción “valor de la empresa” depende de la posición desde la que se afronte dicha definición. Así, es posible establecer el valor de la empresa en términos de la estimación que realicen los accionistas y los acreedores sobre los títulos que poseen (acciones y obligaciones), atendiendo entonces al valor de elementos pertenecientes al pasivo del balance, es decir, a la estructura financiera de la empresa. Por el contrario, la consideración del valor de la empresa, desde la posición que adoptan los eventuales vendedores o compradores de la misma, se centra en el valor del activo necesario para generar beneficios y en la perspectiva que se tiene sobre la evolución futura de los mismos.

En este último caso, el proceso de valoración se encuentra sometido a la necesidad de arbitrar algún mecanismo que facilite el procesamiento de información subjetiva y en muchos casos de naturaleza cualitativa, dado que será preciso establecer estimaciones sobre magnitudes que afectan al futuro, así como considerar las opiniones que terceras personas emiten sobre la futura evolución de la empresa.

La literatura especializa, varios autores han ofrecido diversas alternativas para realizar el proceso de valoración entre los que destacan los siguientes:

- Criterio del precio histórico. Se basa en considerar como valor de cada elemento del activo el precio por el que se adquirió en el momento de su incorporación a la empresa, presentando por tanto claros inconvenientes al no considerar el efecto de la inflación, del progreso técnico, etc.
- Criterio del valor de reposición. Este criterio toma como referencia en la estimación de los precios de cada una de las masas patrimoniales del activo su situación actual en el mercado y su eficiencia económica.
- Criterio del beneficio capitalizado. Parte de la premisa de la obtención de beneficios como objetivo prioritario de la empresa, siendo estos últimos la base para el cálculo del valor de la empresa. De ahí que la valoración se realice descontando, mediante el tipo de interés, los beneficios estimados para periodos futuros, siendo preciso establecer tres variables: tipo de interés, beneficios para cada periodo y tiempo que se considera para el análisis.

El proceso de valoración realizado en función de este último criterio debe suponer un valor superior al realizado sobre la base del resto de criterios, denominándose a la diferencia fondo de comercio o *goodwill*, cuyo cálculo se afronta desde dos perspectivas principales: el método directo que consiste en estimar unos beneficios posibles y unos beneficios normales actualizando la diferencia, y el método indirecto que consiste en actualizar la estimación de beneficios y restarle el valor sustancial.

El criterio del beneficio capitalizado matizado con el del valor sustancial da lugar a lo que se denominan métodos mixtos, entre los que destacan el método alemán, el método de Schmalenbach y el método anglosajón. El método alemán trata de evitar el inconveniente de la incertidumbre de los datos futuros. Para ello, y debido a la inexistencia de técnicas apropiadas para realizar su tratamiento, se ha optado por reducir el valor capitalizado a la mitad del *goodwill* tomando como justificación el principio de prudencia valorativa. De esta forma, se tiene que:

$$V_e = V_s + \frac{1}{2} GW = V_c - \frac{1}{2} GW = V_c - \frac{1}{2} (V_c - V_s) = \frac{V_c + V_s}{2}$$

donde:

V_e valor de la empresa

V_s valor sustancial

V_c valor capitalizado

GW goodwill = $V_c - V_s$

En la expresión anterior se puede observar que este método determina el valor de la empresa como la media entre el valor capitalizado y el valor sustancial, considerando en consecuencia la misma importancia para ambos tipos de valores.

Por su parte, el método anglosajón realiza el cálculo añadiendo al valor sustancial el importe total del goodwill. En consecuencia, ambos métodos adolecen de similares limitaciones, ya que varía únicamente el procedimiento de cálculo, mientras que en el método alemán el goodwill se obtiene indirectamente como diferencia entre el valor capitalizado y el valor sustancial; por su parte, el método anglosajón lo obtiene directamente actualizando la diferencia entre los beneficios esperados y los rendimientos normales del valor sustancial, con lo cual, siendo i el tipo de interés normal, el valor de la empresa vendrá dado por:

$$V_e = V_s + (B - i V_s) \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) \cdot i}$$

La expresión anterior refleja el hecho de que los rendimientos normales en lugar de ser calculados sobre el valor sustancial tienen en cuenta el valor de la empresa, denotando lo que teóricamente pagarán los eventuales compradores.

En caso de que la estimación de beneficios y tipos de interés para los periodos futuros presente distintos valores en cada periodo, el valor de la empresa vendrá determinado por la expresión que se recoge a continuación:

$$V_e = V_s + (B_1 - i_1 V_s)(1+i_1)^{-1} + \dots + (B_n - i_n V_s)(1+i_1)^{-1}(1+i_2)^{-1} \dots (1+i_n)^{-1}$$

Sin embargo, el cálculo así efectuado presenta una serie de inconvenientes que es preciso considerar y tratar de evitar para poder establecer una valoración, lo más cercana a la realidad posible.

Entre los inconvenientes que presenta se encuentra el hecho de que tanto las estimaciones de los tipos de interés como de los beneficios futuros esperados debe ser realizada por expertos, en cuyo caso parece más adecuado establecer un mecanismo que facilite la obtención y posterior agregación de dicha información.

En efecto, normalmente la información disponible para afrontar esta decisión no se puede obtener de forma precisa mediante un valor cuantitativo (un número), resultando más factible obtenerla expresada por parte de los expertos de forma cualitativa. En este caso, la utilización de un enfoque lingüístico se adapta mejor que un enfoque numérico.

El enfoque lingüístico borroso es un enfoque aproximado que tiene como base teórica para su desarrollo la Teoría de los Subconjuntos Borrosos y que representa los aspectos cualitativos como valores lingüísticos mediante “variables lingüísticas”.

3. Representación de Información Lingüística mediante 2-Tuplas

El modelo de representación que utiliza como base de representación un par de valores o 2-tupla ha sido formulado por Herrera y Martínez (2000) como un sistema válido para la representación y el tratamiento de información lingüística.

Este modelo de representación lingüística se basa en el concepto de traslación simbólica, el cual se puede definir como sigue: Sea $S = \{S_0, \dots, S_g\}$ un conjunto de términos lingüísticos y $\beta \in [0, g]$ un valor obtenido por un método simbólico operando con información lingüística. La traslación simbólica de un término lingüístico s_i es un número valorado en el intervalo $[-0.5, 0.5)$ que expresa la “diferencia de información” entre una cantidad de información expresada por el valor $\beta \in [0, g]$ obtenido en una operación simbólica y i el valor entero más próximo, $i \in \{0, \dots, g\}$, que indica el índice de la etiqueta lingüística (s_i) más cercana en S .

El modelo de representación basado en el concepto de traslación simbólica utiliza como base de representación 2-tuplas, (τ_i, α_i) donde $\tau_i \in S$ y $\alpha_i \in [-0.5, 0.5)$, siendo:

τ_i una etiqueta lingüística

α_i número que expresa el valor de la distancia desde el resultado original β al índice de la etiqueta lingüística más cercana (τ_i) en el conjunto de términos lingüísticos S , es decir, su traslación simbólica.

La utilización de la representación anteriormente expuesta precisa convertir cada etiqueta lingüística en su equivalente en 2-tupla, para lo cual, siendo $s_i \in S$ un término lingüístico perteneciente al conjunto S de términos lingüísticos, su representación mediante una 2-tupla equivalente se obtiene mediante la función θ :

$$\theta : S \rightarrow (S \times [-0.5, 0.5))$$

$$\theta(s_i) = (s_i, 0) \quad / \quad s_i \in S$$

Asimismo, a partir de un valor numérico β , $\beta \in [0, g]$, obtenido de una operación simbólica, se puede obtener la 2-tupla lingüística que expresa la información equivalente a β , utilizando la siguiente función:

$$\Delta : [0, g] \rightarrow S \times [-0.5, 0.5)$$

$$\Delta(\beta) = (s_i, \alpha) \text{ con } \begin{cases} s_i, & i = \text{round}(\beta) \\ \alpha = \beta - i, & \alpha \in [-0.5, 0.5) \end{cases}$$

donde:

round: operador usual de redondeo

s_i etiqueta con el índice más cercano a β

α valor de traslación simbólica

En su aplicación al problema de la valoración de empresas, y ante la necesidad de operar con información suministrada por distintos expertos, se plantea la necesidad de analizar las posibilidades que este

modelo de representación ofrece para afrontar el problema de la agregación de opiniones. En este sentido, la representación de información mediante 2-tuplas lingüísticas tiene definidos operadores propios de agregación, tanto operadores simbólicos extendidos para 2-tuplas lingüísticas como operadores basados en operadores de agregación numéricos (Herrera y Martínez, 1999). No obstante, y en función de los buenos resultados obtenidos en su aplicación conjunta con la metodología de los expertones (López González y Mendaña Cuervo, 2001), en el desarrollo del presente trabajo se plantea la utilidad de conjunta de la representación basada en 2-tuplas lingüísticas y la teoría de los expertones.

Asimismo, en situaciones como la que se plantea en la valoración de empresas, en las que se precisa obtener información en base a opiniones emitidas por personas, parece lógico la búsqueda de herramientas que faciliten por un lado la obtención de información en el sentido de facilitar a los expertos los mecanismos para expresarse y por otro la agregación de la información obtenida.

De acuerdo con lo anterior, la representación mediante 2-tuplas lingüísticas presenta ventajas sustantivas respecto a otras metodologías, debido a las posibilidades que ofrece para el tratamiento de información suministrada en distintos dominios de expresión, es decir, para operar con información lingüística multigranular. En efecto, el proceso de unificación de información ha sido analizado desde diferentes enfoques, si bien todos ellos asumen el riesgo de pérdida de información e imprecisión en los resultados obtenidos. Sin embargo, el modelo propuesto por Herrera y Martínez (2000) para operar en estas circunstancias, parte de contextos lingüísticos multigranulares, denominados jerarquías lingüísticas, las cuales cumplen una serie de reglas y condiciones de forma que permite unificar información multigranular en un único dominio de expresión sin pérdida de información.

Las jerarquías lingüísticas están compuestas por un conjunto de niveles, donde cada nivel es un conjunto de términos lingüísticos con distinta granularidad al resto de niveles de su jerarquía. Cada nivel de una jerarquía se puede escribir como:

$$L(t, n(t))$$

donde t es el número que indica el nivel de la jerarquía y $n(t)$ la granularidad del conjunto lingüístico del nivel t .

Los niveles dentro de una jerarquía están ordenados de acuerdo a su granularidad, es decir, para dos niveles sucesivos t y $t+1$ se cumple que $n(t+1) > n(t)$.

De acuerdo con lo anterior se puede definir una jerarquía lingüística (LH) como la unión de todos los niveles t :

$$LH = \bigcup_t L(t, n(t))$$

Para analizar la construcción de una jerarquía lingüística, teniendo en cuenta que su orden jerárquico viene dado por el incremento de la granularidad de los conjuntos de términos lingüísticos en cada nivel, se parte de un conjunto de etiquetas S sobre el dominio U en el nivel t , tal que:

$$S = \{s_0, \dots, s_{n(t)-1}\}$$

siendo s_k los términos lingüísticos del conjunto S con $k = 0, \dots, n(t)-1$.

Para construir una jerarquía lingüística se puede extender la definición de S , permitiendo la existencia de varios conjuntos de términos lingüísticos, cada uno con una granularidad distinta en cada nivel. Para ello se introduce el parámetro $n(t)$ en la definición de un conjunto de etiquetas, que representa la granularidad del conjunto del nivel t donde está definido:

$$S^{n(t)} = \{s_0^{n(t)}, \dots, s_{n(t)-1}^{n(t)}\}$$

Por ejemplo, utilizando un conjunto lingüístico con una función de pertenencia triangular, simétrica y uniformemente distribuida, con un valor de granularidad impar, el Cuadro 1 muestra la granularidad necesaria en cada conjunto lingüístico del nivel t dependiendo del valor $n(t)$ definido en el primer nivel (3 y 7, respectivamente).

	$L(t, n(t))$	$L(t, n(t))$
Nivel 1	$L(1, 3)$	$L(1, 7)$
Nivel 2	$L(2, 5)$	$L(2, 13)$
Nivel 3	$L(3, 9)$	

Cuadro 1

En general, cabe admitir que el conjunto de términos del nivel $t+1$ se obtiene de su predecesor como sigue:

$$L(t, n(t)) \rightarrow L(t+1, 2 \cdot n(t) - 1)$$

En la Figura 1 se puede observar un gráfico de las jerarquías lingüísticas de 3, 5 y 9 etiquetas.

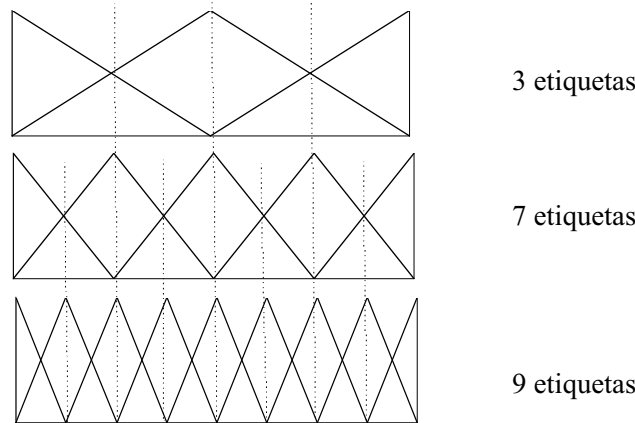


Figura 1.

En este punto interesa establecer una función que permita trasladar información lingüística de un conjunto de términos a otro sin pérdida de información. Para ello, estos autores definen en primer término el paso de un nivel al inmediatamente superior e inferior, para con posterioridad generalizar el procedimiento de forma que permita transformaciones entre términos de niveles no consecutivos, el cual se realiza mediante una función recursiva de transformación de un término del nivel t a uno del nivel $t' = t+a$, con $a \in \mathbb{Z}$ que se define como sigue:

$$TF_{t'}^t : l(t, n(t)) \rightarrow l(t', n(t'))$$

- Si $|a| > 1$ entonces $TF_{t'}^t(s_i^{n(t)}, \alpha^{n(t)}) = TF_{t'}^{t + \frac{t-t'}{|t-t'|}} \left(TF_{t + \frac{t-t'}{|t-t'|}}^t(s_i^{n(t)}, \alpha^{n(t)}) \right)$
- Si $|a| = 1$ entonces $TF_{t'}^t(s_i^{n(t)}, \alpha^{n(t)}) = TF_{t + \frac{t-t'}{|t-t'|}}^t(s_i^{n(t)}, \alpha^{n(t)})$

Esta función recursiva se puede definir no recursivamente como sigue:

$$TF_t^t : l(t, n(t)) \rightarrow l(t', n(t'))$$

$$TF_t^{t'}(s_i^{n(t)}, \alpha_i^{n(t)}) = \Delta^{-1} \left(\frac{\Delta(s_i^{n(t)}, \alpha_i^{n(t)}) \cdot (n(t') - 1)}{n(t) - 1} \right)$$

La función de transformación de términos entre distintos niveles de una jerarquía es idempotente:

$$TF_t^{t'}(TF_t^t(s_i^{n(t)}, \alpha_i^{n(t)})) = (s_i^{n(t)}, \alpha_i^{n(t)})$$

como se demuestra a continuación:

$$TF_t^t(s_i^{n(t)}, \alpha_i^{n(t)}) = \Delta \left(\frac{\Delta^{-1}(s_i^{n(t)}, \alpha_i^{n(t)}) \cdot (n(t') - 1)}{n(t) - 1} \right)$$

Por tanto:

$$TF_t^{t'} = \Delta \left(\frac{\Delta^{-1}(s_i^{n(t)}, \alpha_i^{n(t)}) \cdot (n(t') - 1)}{n(t) - 1} \right) = \Delta \left(\frac{\Delta^{-1} \left(\Delta \left(\frac{\Delta^{-1}(s_i^{n(t)}, \alpha_i^{n(t)}) \cdot (n(t') - 1)}{n(t) - 1} \right) \right) \cdot (n(t) - 1)}{n(t') - 1} \right) =$$

$$= \Delta \left(\frac{\Delta^{-1}(s_i^{n(t)}, \alpha_i^{n(t)}) \cdot (n(t') - 1) \cdot (n(t) - 1)}{(n(t) - 1) \cdot (n(t') - 1)} \right) = (s_i^{n(t)}, \alpha_i^{n(t)})$$

En consecuencia, este resultado garantiza la transformación sin pérdida de información. De acuerdo con lo anterior, la representación basada en 2-tuplas lingüísticas, mediante la función de transformación analizada, permite la unificación de información en un solo dominio de expresión, permitiendo “traducir” los resultados en los dominios utilizados inicialmente por cada experto, con independencia del dominio elegido para el proceso de unificación.

Las consideraciones anteriores han conducido a los autores a la utilización de esta metodología de forma conjunta con la técnica de los expertones en el ejemplo de desarrollo de valuación de empresas que será objeto de estudio en el apartado siguiente

4. La Valoración de Empresas aplicando Expertones y con Información representada en 2-Tuplas Lingüísticas

En el segundo apartado se han definido diversos criterios para la valoración de empresas, haciéndose necesario para la aplicación de los mismos, tanto la estimación de tipos de interés como de los beneficios esperados. En ambos casos, la información necesaria hace referencia al futuro, razón por la cual no es posible disponer de información numérica cierta para proceder a la valuación, lo que implica la necesidad de acudir a las opiniones que puedan proporcionar expertos sobre el comportamiento futuro de ambas variables.

Por tanto, el proceso de obtención de información para establecer el valor esperado de la empresa implica la necesidad de habilitar mecanismos que faciliten a las personas emitir su opinión sobre los valores estimados, de ahí que en el desarrollo del presente trabajo se establezca la posibilidad por parte del experto de expresarse en valores lingüísticos, facilitando asimismo la elección por parte de cada experto de escoger el dominio lingüístico que le resulte más cómodo para ofrecer su valoración.

De acuerdo con lo anterior, en los apartados siguientes se realiza un análisis de los mecanismos que se presentan en este trabajo tanto para la evaluación de los tipos de interés como de los beneficios esperados, en aras a facilitar el proceso de valoración de empresas. En ambos, y con la finalidad de proporcionar un mejor entendimiento del proceso descrito, se desarrolla un ejemplo de ilustración práctica.

4.1. Estimación de tipos de interés

En el presente apartado se plantea el desarrollo de la estimación de tipos de interés futuros. Este proceso suele comenzar con un análisis que permita considerar los posibles tramos entre los que puede fluctuar el tipo de interés para los periodos que se van a considerar a efectos de analizar el valor de la empresa, de forma que éstos sirvan de punto de inicio en el proceso de negociación entre las partes.

En el ejemplo de ilustración práctica que se pretende desarrollar se ha establecido un periodo de análisis de tres años, para los cuales se han considerado los siguientes tramos para los tipos de interés: [0'04, 0'05], [0'045, 0'06] y [0'05, 0'06].

A fin de consensuar un acuerdo sobre la validez de dicha información, es factible acudir a varios expertos (en el ejemplo práctico se suponen 10) para que faciliten su conformidad con cada uno de los valores de partida.

La solicitud de información a personas, de acuerdo con las consideraciones efectuadas en los apartados anteriores, debe poder realizarse de forma que cada uno pueda expresarse en los términos que le resulten más habituales; de ahí que no deba imponerse el dominio de expresión, sino que se deba facilitar la obtención de información con independencia del dominio elegido por cada experto. A efectos ilustrativos, para la resolución del problema se parte de que cada experto emite su opinión en el conjunto lingüístico que más fácil le resulte entre los siguientes:

$S^5 = \{MA, A, M, B, MB\}$ $S^7 = \{MA, BA, A, M, B, BB, MB\}$ $S^9 = \{PS, MA, BA, A, M, B, BB, MB, PN\}$
donde el superíndice indica el número de etiquetas del conjunto lingüístico y cuya semántica asociada es la siguiente:

$S^5 = \{MA=Muy_Alta, A=Alta, M=Media, B=Baja, MB=Muy_Baja\}$

$S^7 = \{MA=Muy_Alta, A=Alta, BA=Bastante_Alta, M=Media, B=Baja, BB=Bastante_Baja, MB=Muy_Baja\}$

$S^9 = \{PS=Prácticamente_Seguro, MA=Muy_Alta, A=Alta, BA=Bastante_Alta, M=Media, B=Baja, BB=Bastante_Baja, MB=Muy_Baja, PN=Prácticamente_Nulo\}$

No obstante lo anterior, es posible que las opiniones de los expertos no se ajusten con exactitud a ninguna de las etiquetas anteriores, de forma que se debe establecer la posibilidad de que su respuesta venga establecida por un par de etiquetas dentro de cada dominio. En base a lo anterior, a efectos ilustrativos se supone que la información obtenida de los expertos es la que recoge el Cuadro 2.

Experto	[0'04, 0'05]	[0'045, 0'06]	[0'05, 0'06]	Dominio
e ₁	0-100	00	0-10	S ⁵
e ₂	0-100	0-100	00-10	S ⁷
e ₃	00	00	00-10	S ⁹
e ₄	0	000-100	000-10	S ⁹
e ₅	0-100	0-100	0	S ⁵
e ₆	00	0	000-10	S ⁵
e ₇	00	0-100	000-10	S ⁹
e ₈	0-100	0-100	0-100	S ⁹
e ₉	00	00-10	00-100	S ⁷
e ₁₀	00-100	0-100	00-100	S ⁹

Cuadro 2

En consecuencia, los datos disponibles para afrontar la decisión se encuentran expresados mediante información lingüística multigranular, razón por la cual en primer término será preciso unificar dicha información en un único dominio de expresión. De acuerdo con lo comentado en el apartado 4.1, la metodología propuesta para afrontar este problema en el presente trabajo es la de jerarquías lingüísticas propuesta por Herrera y Martínez (2000a).

En la situación anteriormente planteada los dominios quedarán definidos como sigue:

$$\begin{array}{llllll}
 e_1 & l(1,5) & e_2 & l(2,7) & e_3 & l(3,9) & e_4 & l(3,9) & e_5 & l(1,5) \\
 e_6 & l(1,5) & e_7 & l(3,9) & e_8 & l(3,9) & e_9 & l(2,7) & e_{10} & l(3,9)
 \end{array}$$

De forma que las valoraciones establecidas por cada uno de los expertos se pueden representar en base al dominio que utiliza como se recoge en el Cuadro 3.

Experto	[0'04, 0'05]	[0'045, 0'06]	[0'05, 0'06]
e ₁	S ₃ ⁵ S ₄ ⁵	S ₄ ⁵	S ₁ ⁵ S ₂ ⁵
e ₂	S ₄ ⁷ S ₅ ⁷	S ₄ ⁷ S ₆ ⁷	S ₀ ⁷
e ₃	S ₆ ⁹	S ₈ ⁹	S ₀ ⁹ S ₃ ⁹
e ₄	S ₅ ⁹	S ₇ ⁹ S ₈ ⁹	S ₂ ⁹ S ₄ ⁹
e ₅	S ₃ ⁵ S ₄ ⁵	S ₃ ⁵ S ₄ ⁵	S ₁ ⁵
e ₆	S ₄ ⁵	S ₄ ⁵	S ₀ ⁵ S ₁ ⁵
e ₇	S ₈ ⁹	S ₅ ⁹ S ₇ ⁹	S ₂ ⁹ S ₄ ⁹
e ₈	S ₅ ⁹ S ₇ ⁹	S ₅ ⁹ S ₆ ⁹	S ₅ ⁹ S ₇ ⁹
e ₉	S ₆ ⁷	S ₁ ⁷ S ₂ ⁷	S ₅ ⁷ S ₆ ⁷
e ₁₀	S ₀ ⁹ S ₁ ⁹	S ₅ ⁹ S ₆ ⁹	S ₆ ⁹ S ₈ ⁹

Cuadro 3

En primer lugar será preciso proceder a la normalización de las valoraciones establecidas por los expertos. Para ello es necesario determinar el conjunto de términos lingüísticos que se va a utilizar como base para unificar la información. Por razones prácticas, y dado que la mayoría de los expertos en el ejemplo utilizan el dominio l(3,9), será éste el que se utilice como referencia a efectos de unificación, si bien es posible elegir otro cualquiera.

De esta forma, y a efectos ilustrativos, a continuación se muestra la unificación de las expresiones del primer experto (e₁) que, aplicando la función de transformación recogida en el apartado 3 se procedería como sigue:

- Para A
$$= (s_3^5, 0) \rightarrow TF_3^1(s_3^5, 0) = \Delta^{-1} \left(\frac{\Delta(s_3^5, 0) \cdot (9-1)}{(5-1)} \right) = \Delta^{-1}(6) = (\xi_6^9, 0)$$
- Para MA
$$= (s_4^5, 0) \rightarrow TF_3^1(s_4^5, 0) = \Delta^{-1} \left(\frac{\Delta(s_4^5, 0) \cdot (9-1)}{(5-1)} \right) = \Delta^{-1}(8) = (\xi_8^9, 0)$$
- Para B
$$= (s_1^5, 0) \rightarrow TF_3^1(s_1^5, 0) = \Delta^{-1} \left(\frac{\Delta(s_1^5, 0) \cdot (9-1)}{(5-1)} \right) = \Delta^{-1}(2) = (\xi_2^9, 0)$$
- Para M
$$= (s_2^5, 0) \rightarrow TF_3^1(s_2^5, 0) = \Delta^{-1} \left(\frac{\Delta(s_2^5, 0) \cdot (9-1)}{(5-1)} \right) = \Delta^{-1}(4) = (\xi_4^9, 0)$$

De forma análoga se normaliza la información suministrada por el resto de expertos, obteniendo los valores unificados en el dominio de expresión elegido, como se refleja en el Cuadro 4.

	[0'04, 0'05]	[0'045, 0'06]	[0'05, 0'06]
e ₁	($\xi_6^9, 0$) ($\xi_8^9, 0$)	($\xi_8^9, 0$)	($\xi_2^9, 0$) ($\xi_4^9, 0$)
e ₂	($\xi_5^9, 0'33$) ($\xi_7^9, -0'37$)	($\xi_5^9, 0'33$) ($\xi_8^9, 0$)	($\xi_0^9, 0$) ($\xi_4^9, 0$)
e ₃	($\xi_6^9, 0$)	($\xi_8^9, 0$)	($\xi_0^9, 0$) ($\xi_3^9, 0$)
e ₄	($\xi_5^9, 0$)	($\xi_7^9, 0$) ($\xi_8^9, 0$)	($\xi_2^9, 0$) ($\xi_4^9, 0$)
e ₅	($\xi_9^9, 0$) ($\xi_8^9, 0$)	($\xi_6^9, 0$) ($\xi_8^9, 0$)	($\xi_2^9, 0$)
e ₆	($\xi_8^9, 0$)	($\xi_8^9, 0$)	($\xi_0^9, 0$) ($\xi_2^9, 0$)
e ₇	($\xi_8^9, 0$)	($\xi_5^9, 0$) ($\xi_7^9, 0$)	($\xi_2^9, 0$) ($\xi_4^9, 0$)
e ₈	($\xi_5^9, 0$) ($\xi_7^9, 0$)	($\xi_5^9, 0$) ($\xi_6^9, 0$)	($\xi_5^9, 0$) ($\xi_7^9, 0$)
e ₉	($\xi_8^9, 0$)	($\xi_1^9, 0'33$) ($\xi_3^9, -0'33$)	($\xi_7^9, -0'37$) ($\xi_8^9, 0$)
e ₁₀	($\xi_0^9, 0$) ($\xi_1^9, 0$)	($\xi_5^9, 0$) ($\xi_6^9, 0$)	($\xi_6^9, 0$) ($\xi_8^9, 0$)

Cuadro 4

Con la información representada en 2-tuplas lingüísticas, unificada en un mismo dominio de expresión, se puede proceder al proceso de agregación de dicha información, consistente en obtener un valor que represente el conjunto de valores (el conjunto de opiniones) que se desean agregar. El resultado del proceso aplicado a un conjunto de 2-tuplas vendrá establecido también en una 2-tupla, con independencia del criterio elegido para proceder a la agregación.

En el desarrollo del presente trabajo se ha optado por aplicar la metodología de los expertones (Kaufmann, 1987; Kaufmann y Gil Aluja, 1993), utilizando las distintas 2-tuplas lingüísticas obtenidas tras el proceso de normalización y unificación de la información multigranular recogida en el Cuadro 4 anterior. A partir de dichos datos es posible obtener las correspondientes estadísticas que se recogen en el Cuadro 5.

[0'04, 0'05]	[0'045, 0'06]	[0'05, 0'06]
$(\xi_0^9, 0)$	$(\xi_0^9, 0)$	$(\xi_0^9, 0)$
$(\xi_1^9, 0)$	$(\xi_1^9, 0)$	$(\xi_1^9, 0)$
$(\xi_2^9, 0)$	$(\xi_1^9, 0'33)$	$(\xi_2^9, 0)$
$(\xi_3^9, 0)$	$(\xi_2^9, 0)$	$(\xi_3^9, 0)$
$(\xi_4^9, 0)$	$(\xi_2^9, 0'67)$	$(\xi_4^9, 0)$
$(\xi_5^9, 0)$	$(\xi_3^9, 0)$	$(\xi_5^9, 0)$
$(\xi_5^9, 0'33)$	$(\xi_4^9, 0)$	$(\xi_6^9, 0)$
$(\xi_6^9, 0)$	$(\xi_5^9, 0)$	$(\xi_7^9, -0'33)$
$(\xi_6^9, 0'67)$	$(\xi_5^9, 0'33)$	$(\xi_7^9, 0)$
$(\xi_7^9, 0)$	$(\xi_6^9, 0)$	$(\xi_8^9, 0)$
$(\xi_8^9, 0)$	$(\xi_7^9, 0)$	
	$(\xi_8^9, 0)$	

Cuadro 5

Así como los expertones que figuran en el Cuadro 6 para cada una de las 2-tupla obtenidas.

[0'04, 0'05]	[0'045, 0'06]	[0'05, 0'06]
$(\xi_0^9, 0)$	$(\xi_0^9, 0)$	$(\xi_0^9, 0)$
$(\xi_1^9, 0)$	$(\xi_1^9, 0)$	$(\xi_1^9, 0)$
$(\xi_2^9, 0)$	$(\xi_1^9, 0'33)$	$(\xi_2^9, 0)$
$(\xi_3^9, 0)$	$(\xi_2^9, 0)$	$(\xi_3^9, 0)$
$(\xi_4^9, 0)$	$(\xi_2^9, 0'67)$	$(\xi_4^9, 0)$
$(\xi_5^9, 0)$	$(\xi_3^9, 0)$	$(\xi_5^9, 0)$
$(\xi_5^9, 0'33)$	$(\xi_4^9, 0)$	$(\xi_6^9, 0)$
$(\xi_6^9, 0)$	$(\xi_5^9, 0)$	$(\xi_7^9, -0'33)$
$(\xi_6^9, 0'67)$	$(\xi_5^9, 0'33)$	$(\xi_7^9, 0)$
$(\xi_7^9, 0)$	$(\xi_6^9, 0)$	$(\xi_8^9, 0)$
$(\xi_8^9, 0)$	$(\xi_7^9, 0)$	
	$(\xi_8^9, 0)$	

Cuadro 6

A partir de la información anterior es posible determinar los R^+ -expertones, procediéndose como se refleja en los Cuadros 7, 8 y 9 que siguen a continuación.

$0'04 + (0'05 - 0'04)(\cdot)$	$(\xi_0^9, 0)$ $(\xi_1^9, 0)$ $(\xi_2^9, 0)$ $(\xi_3^9, 0)$ $(\xi_4^9, 0)$ $(\xi_5^9, 0)$ $(\xi_5^9, 0'33)$ $(\xi_6^9, 0)$ $(\xi_6^9, 0'67)$ $(\xi_7^9, 0)$ $(\xi_8^9, 0)$	$(\xi_0^9, 0)$ $(\xi_1^9, 0)$ $(\xi_2^9, 0)$ $(\xi_3^9, 0)$ $(\xi_4^9, 0)$ $(\xi_5^9, 0)$ $(\xi_5^9, 0'33)$ $(\xi_6^9, 0)$ $(\xi_6^9, 0'67)$ $(\xi_7^9, 0)$ $(\xi_8^9, 0)$	R^+ -expertón
-------------------------------	--	--	-----------------

Cuadro 7

$0'045 + (0'06 - 0'045)(\cdot)$	$(\xi_0^9, 0)$	0.000	1.000	$(\xi_0^9, 0)$	0.000	1.000
	$(\xi_1^9, 0)$	0.000	1.000	$(\xi_1^9, 0)$	0.000	1.000
	$(\xi_1^9, 0'33)$	0.000	1.000	$(\xi_1^9, 0'33)$	0.000	1.000
	$(\xi_2^9, 0)$	0.000	1.000	$(\xi_2^9, 0)$	0.000	1.000
	$(\xi_2^9, 0'67)$	0.000	1.000	$(\xi_2^9, 0'67)$	0.000	1.000
	$(\xi_3^9, 0)$	0.000	1.000	$(\xi_3^9, 0)$	0.000	1.000
	$(\xi_4^9, 0)$	0.000	1.000	$(\xi_4^9, 0)$	0.000	1.000
	$(\xi_5^9, 0)$	0.000	1.000	$(\xi_5^9, 0)$	0.000	1.000
	$(\xi_5^9, 0'33)$	0.000	1.000	$(\xi_5^9, 0'33)$	0.000	1.000
	$(\xi_6^9, 0)$	0.000	1.000	$(\xi_6^9, 0)$	0.000	1.000
	$(\xi_7^9, 0)$	0.000	1.000	$(\xi_7^9, 0)$	0.000	1.000
	$(\xi_8^9, 0)$	0.000	1.000	$(\xi_8^9, 0)$	0.000	1.000
				R^+ -expertón		

Cuadro 8

$0'05 + (0'06 - 0'05)(\cdot)$	$(\xi_0^9, 0)$	0.000	1.000	$(\xi_0^9, 0)$	0.000	1.000
	$(\xi_1^9, 0)$	0.000	1.000	$(\xi_1^9, 0)$	0.000	1.000
	$(\xi_2^9, 0)$	0.000	1.000	$(\xi_2^9, 0)$	0.000	1.000
	$(\xi_3^9, 0)$	0.000	1.000	$(\xi_3^9, 0)$	0.000	1.000
	$(\xi_4^9, 0)$	0.000	1.000	$(\xi_4^9, 0)$	0.000	1.000
	$(\xi_5^9, 0)$	0.000	1.000	$(\xi_5^9, 0)$	0.000	1.000
	$(\xi_6^9, 0)$	0.000	1.000	$(\xi_6^9, 0)$	0.000	1.000
	$(\xi_7^9, -0'33)$	0.000	1.000	$(\xi_7^9, -0'33)$	0.000	1.000
	$(\xi_7^9, 0)$	0.000	1.000	$(\xi_7^9, 0)$	0.000	1.000
	$(\xi_8^9, 0)$	0.000	1.000	$(\xi_8^9, 0)$	0.000	1.000
				R^+ -expertón		

Cuadro 9

En los valores obtenidos se puede calcular la esperanza matemática que será:

$$\begin{pmatrix} \dot{i}_1 \\ \sim \end{pmatrix} = [0'04610, 0'04720] \quad \begin{pmatrix} \dot{i}_1 \\ \sim \end{pmatrix} = [0'05632, 0'05836] \quad \begin{pmatrix} \dot{i}_1 \\ \sim \end{pmatrix} = [0'05289, 0'05544]$$

lo que permite establecer la opinión agregada de los expertos obteniendo estimaciones para los tipos de interés más ajustada que las inicialmente consideradas.

En caso de que se considere necesario proceder a una parametrización de los datos suministrados por los expertos, debido al inconveniente que plantea esta metodología en cuanto a la traslación de los intervalos obtenidos hacia los extremos superiores, se podría operar, teniendo en consideración la identificación parametrizada de Sugeno (1974) siguiente:

$$i^{(\lambda)} = \frac{i}{1 + (1 - i)\lambda}, \quad \lambda \in]-1, \infty)$$

La operativa anterior precisa determinar el valor del parámetro λ que a efectos ilustrativos se estima bastará considerar $\lambda \in [0, 1]$. En concreto, para la resolución del ejemplo se establece un valor de $\lambda = 0'5$. La

parametrización para obtener $\varepsilon \left(i^{(\lambda=0'5)} \right)$ se realizará nivel por nivel para cada 2-tupla obtenida en el expertón, de forma que para el primer periodo se tendrá el resultado del Cuadro 10.

$(\xi_0^9, 0)$	0.000	0.000	$(\xi_0^9, 0)$	0.000	0.000
$(\xi_1^9, 0)$	0.000	0.000	$(\xi_1^9, 0)$	0.000	0.000
$(\xi_2^9, 0)$	0.000	0.000	$(\xi_2^9, 0)$	0.000	0.000
$(\xi_3^9, 0)$	0.000	0.000	$(\xi_3^9, 0)$	0.000	0.000
$(\xi_4^9, 0)$	0.000	0.000	$(\xi_4^9, 0)$	0.000	0.000
$(\xi_5^9, 0)$	0.000	0.000	$(\xi_5^9, 0)$	0.000	0.000
$(\xi_5^9, 0'33)$	0.000	0.000	$(\xi_5^9, 0'33)$	0.000	0.000
$(\xi_6^9, 0)$	0.000	0.000	$(\xi_6^9, 0)$	0.000	0.000
$(\xi_6^9, 0'67)$	0.000	0.000	$(\xi_6^9, 0'67)$	0.000	0.000
$(\xi_7^9, 0)$	0.000	0.000	$(\xi_7^9, 0)$	0.000	0.000
$(\xi_8^9, 0)$	0.000	0.000	$(\xi_8^9, 0)$	0.000	0.000

Cuadro 10

La esperanza matemática del expertón parametrado será igual a $[0'5561, 0'6665]$, de forma que se podrán estimar los intereses correspondientes al primer periodo de análisis como sigue a continuación:

$$\varepsilon \left(i^{(\lambda=0'5)} \right) = 0'04 + (0'05)(\cdot) [0'5561, 0'6665] = [0'04556, 0'04666]$$

Operando de forma análoga para los intereses de los dos periodos siguientes se obtienen los siguientes resultados para los tres tramos: $[0'04556, 0'04666]$, $[0'05552, 0'05781]$, $[0'05233, 0'05485]$.

4.2. Estimación de los beneficios

Como se indicó en el segundo apartado, el proceso de valuación de la empresa precisa establecer unos valores sobre los que compradores y vendedores se encuentren de acuerdo, respecto a los posibles beneficios a obtener en los periodos considerados. Para ello, en primer término cabe partir de unos intervalos para la cuantificación de los beneficios que servirán de referencia para solicitar la opinión de expertos en la materia establecidos tanto por la parte compradora como por la vendedora. A efectos operativos de la resolución práctica se han establecido los siguientes intervalos indicativos de los posibles beneficios para los tres periodos de análisis:

$$B_{\sim 1} = [4.000, 6.000] \quad B_{\sim 2} = [3.000, 6.000] \quad B_{\sim 3} = [2.000, 5.000]$$

A partir de las estimaciones anteriores, cabe solicitar la colaboración de un grupo de expertos, en concreto en el ejemplo 5, para que emitan su opinión mediante evaluaciones lingüísticas. Con objeto de facilitar la obtención de esta información, de forma análoga al apartado 4.1., se permite que cada experto se exprese en el dominio que le sea más factible. De esta forma, y suponiendo las opiniones recogidas en el Cuadro 11, es posible, representar dicha información en función del dominio que utiliza cada experto, como se recoge en el Cuadro 12.

Compradores	[4.000, 6.000]	[3.000, 6.000]	[2.000, 5.000]	Dominio
e_1	S^5	S^5	S^5	S^5
e_2	S^7	S^7	S^7	S^7
e_3	S^9	S^9	S^9	S^9
e_4	S^9	S^9	S^9	S^9
e_5	S^5	S^5	S^5	S^5
e_1	S^7	S^7	S^7	S^7
e_2	S^9	S^9	S^9	S^9
e_3	S^5	S^5	S^5	S^5
e_4	S^5	S^5	S^5	S^5
e_5	S^9	S^9	S^9	S^9

Cuadro 11

El proceso de normalización de la información anterior en un único dominio de expresión se realizará de forma similar a lo analizado en el apartado anterior, utilizando como dominio $l(3,9)$, dando como resultado el mostrado en el Cuadro 13.

Compradores	[4.000, 6.000]	[3.000, 6.000]	[2.000, 5.000]	Dominio
e_1	$S_2^5 \ S_3^5$	$S_1^5 \ S_2^5$	$S_1^5 \ S_2^5$	S^5
e_2	$S_2^7 \ S_3^7$	$S_3^7 \ S_5^7$	$S_0^7 \ S_3^7$	S^7
e_3	S_5^9	$S_1^9 \ S_2^9$	$S_0^9 \ S_3^9$	S^9
e_4	S_5^9	$S_5^9 \ S_6^9$	$S_2^9 \ S_4^9$	S^9
e_5	$S_1^5 \ S_2^5$	$S_2^5 \ S_3^5$	S_1^5	S^5
e_1	$S_5^7 \ S_6^7$	$S_3^7 \ S_4^7$	$S_4^7 \ S_5^7$	S^7
e_2	$S_5^9 \ S_6^9$	$S_7^9 \ S_8^9$	$S_3^9 \ S_4^9$	S^9
e_3	$S_2^5 \ S_3^5$	S_3^5	$S_1^5 \ S_2^5$	S^5
e_4	$S_1^5 \ S_3^5$	$S_1^5 \ S_2^5$	$S_1^5 \ S_3^5$	S^5
e_5	$S_5^9 \ S_6^9$	$S_7^9 \ S_8^9$	$S_6^9 \ S_7^9$	S^9

Cuadro 12

Compradores	[4.000, 6.000]	[3.000, 6.000]	[2.000, 5.000]
e_1	$(S_{4,0}^9 \ S_{6,0}^9)$	$(S_{2,0}^9 \ S_{4,0}^9)$	$(S_{2,0}^9 \ S_{4,0}^9)$
e_2	$(S_{3,-0'33}^9 \ S_{4,0}^9)$	$(S_{4,0}^9 \ S_{7,-0'33}^9)$	$(S_{0,0}^9 \ S_{4,0}^9)$
e_3	$(S_{5,0}^9)$	$(S_{1,0}^9 \ S_{2,0}^9)$	$(S_{0,0}^9 \ S_{3,0}^9)$
e_4	$(S_{5,0}^9)$	$(S_{5,0}^9 \ S_{6,0}^9)$	$(S_{2,0}^9 \ S_{4,0}^9)$
e_5	$(S_{2,0}^9 \ S_{4,0}^9)$	$(S_{4,0}^9 \ S_{6,0}^9)$	$(S_{2,0}^9)$
e_1	$(S_{7,-0'33}^9 \ S_{8,0}^9)$	$(S_{4,0}^9 \ S_{3,0'33}^9)$	$(S_{5,0'33}^9 \ S_{7,-0'33}^9)$
e_2	$(S_{5,0}^9 \ S_{6,0}^9)$	$(S_{7,0}^9 \ S_{8,0}^9)$	$(S_{3,0}^9 \ S_{4,0}^9)$
e_3	$(S_{4,0}^9 \ S_{6,0}^9)$	$(S_{6,0}^9)$	$(S_{2,0}^9 \ S_{4,0}^9)$
e_4	$(S_{2,0}^9 \ S_{6,0}^9)$	$(S_{2,0}^9 \ S_{4,0}^9)$	$(S_{2,0}^9 \ S_{6,0}^9)$
e_5	$(S_{5,0}^9 \ S_{6,0}^9)$	$(S_{7,0}^9 \ S_{8,0}^9)$	$(S_{6,0}^9 \ S_{7,0}^9)$

Cuadro 13

A continuación, se tratará de agregar la información unificada, obteniendo un valor que represente el conjunto de opiniones recogidas de los distintos expertos. A este respecto, se procede a realizar la agregación, siguiendo la misma metodología aplicada en el caso de la estimación de tipo de interés en función de las opiniones de los expertos. Por tanto, a partir de los datos recogidos en el Cuadro 13 será posible establecer las estadísticas correspondientes para las opiniones de los expertos compradores y vendedores recogidos en los Cuadros 14 y 15, respectivamente.

[4.000, 6.000]	[3.000, 6.000]	[2.000, 5.000]
$(\xi_0^9, 0)$	$(\xi_0^9, 0)$	$(\xi_0^9, 0)$
$(\xi_1^9, 0)$	$(\xi_1^9, 0)$	$(\xi_1^9, 0)$
$(\xi_2^9, 0)$	$(\xi_2^9, 0)$	$(\xi_2^9, 0)$
$(\xi_3^9, -0'33)$	$(\xi_3^9, 0)$	$(\xi_3^9, 0)$
$(\xi_3^9, 0)$	$(\xi_4^9, 0)$	$(\xi_4^9, 0)$
$(\xi_4^9, 0)$	$(\xi_5^9, 0)$	$(\xi_5^9, 0)$
$(\xi_5^9, 0)$	$(\xi_6^9, 0)$	$(\xi_6^9, 0)$
$(\xi_6^9, 0)$	$(\xi_7^9, -0'33)$	$(\xi_7^9, 0)$
$(\xi_7^9, 0)$	$(\xi_7^9, 0)$	$(\xi_8^9, 0)$
$(\xi_8^9, 0)$	$(\xi_8^9, 0)$	

Cuadro 14

[4.000, 6.000]	[3.000, 6.000]	[2.000, 5.000]
$(\xi_0^9, 0)$	$(\xi_0^9, 0)$	$(\xi_0^9, 0)$
$(\xi_1^9, 0)$	$(\xi_1^9, 0)$	$(\xi_1^9, 0)$
$(\xi_2^9, 0)$	$(\xi_2^9, 0)$	$(\xi_2^9, 0)$
$(\xi_3^9, 0)$	$(\xi_3^9, 0)$	$(\xi_3^9, 0)$
$(\xi_4^9, 0)$	$(\xi_4^9, 0)$	$(\xi_4^9, 0)$
$(\xi_5^9, 0)$	$(\xi_5^9, 0)$	$(\xi_5^9, 0)$
$(\xi_6^9, 0)$	$(\xi_5^9, 0'33)$	$(\xi_5^9, 0'33)$
$(\xi_7^9, -0'33)$	$(\xi_6^9, 0)$	$(\xi_6^9, 0)$
$(\xi_7^9, 0)$	$(\xi_7^9, 0)$	$(\xi_7^9, -0'33)$
$(\xi_8^9, 0)$	$(\xi_8^9, 0)$	$(\xi_7^9, 0)$
		$(\xi_8^9, 0)$

Cuadro 15

Igualmente, será posible establecer los expertones siguientes para cada una de las 2-tuplas obtenidas, que se muestran en los Cuadros 16 y 17, respectivamente.

[4.000, 6.000]			[3.000, 6.000]			[2.000, 5.000]		
$(\xi_{0,0}^9)$	1.000	1.000	$(\xi_{0,0}^9)$	1.000	1.000	$(\xi_{0,0}^9)$	1.000	1.000
$(\xi_{1,0}^9)$	1.000	1.000	$(\xi_{1,0}^9)$	1.000	1.000	$(\xi_{1,0}^9)$	1.000	1.000
$(\xi_{2,0}^9)$	1.000	1.000	$(\xi_{2,0}^9)$	1.000	1.000	$(\xi_{2,0}^9)$	1.000	1.000
$(\xi_{3,-0'33}^9)$	1.000	1.000	$(\xi_{3,0}^9)$	1.000	1.000	$(\xi_{3,0}^9)$	1.000	1.000
$(\xi_{3,0}^9)$	1.000	1.000	$(\xi_{4,0}^9)$	1.000	1.000	$(\xi_{4,0}^9)$	1.000	1.000
$(\xi_{4,0}^9)$	1.000	1.000	$(\xi_{5,0}^9)$	1.000	1.000	$(\xi_{5,0}^9)$	1.000	1.000
$(\xi_{5,0}^9)$	1.000	1.000	$(\xi_{6,0}^9)$	1.000	1.000	$(\xi_{6,0}^9)$	1.000	1.000
$(\xi_{6,0}^9)$	1.000	1.000	$(\xi_{7,-0'33}^9)$	1.000	1.000	$(\xi_{7,0}^9)$	1.000	1.000
$(\xi_{7,0}^9)$	1.000	1.000	$(\xi_{8,0}^9)$	1.000	1.000	$(\xi_{8,0}^9)$	1.000	1.000
$(\xi_{8,0}^9)$	1.000	1.000						

Cuadro 16

[4.000, 6.000]			[3.000, 6.000]			[2.000, 5.000]		
$(\xi_{0,0}^9)$	1.000	1.000	$(\xi_{0,0}^9)$	1.000	1.000	$(\xi_{0,0}^9)$	1.000	1.000
$(\xi_{1,0}^9)$	1.000	1.000	$(\xi_{1,0}^9)$	1.000	1.000	$(\xi_{1,0}^9)$	1.000	1.000
$(\xi_{2,0}^9)$	1.000	1.000	$(\xi_{2,0}^9)$	1.000	1.000	$(\xi_{2,0}^9)$	1.000	1.000
$(\xi_{3,0}^9)$	1.000	1.000	$(\xi_{3,0}^9)$	1.000	1.000	$(\xi_{3,0}^9)$	1.000	1.000
$(\xi_{4,0}^9)$	1.000	1.000	$(\xi_{4,0}^9)$	1.000	1.000	$(\xi_{4,0}^9)$	1.000	1.000
$(\xi_{5,0}^9)$	1.000	1.000	$(\xi_{5,0}^9)$	1.000	1.000	$(\xi_{5,0}^9)$	1.000	1.000
$(\xi_{6,0}^9)$	1.000	1.000	$(\xi_{5,0'33}^9)$	1.000	1.000	$(\xi_{5,0'33}^9)$	1.000	1.000
$(\xi_{7,-0'33}^9)$	1.000	1.000	$(\xi_{6,0}^9)$	1.000	1.000	$(\xi_{6,0}^9)$	1.000	1.000
$(\xi_{7,0}^9)$	1.000	1.000	$(\xi_{7,0}^9)$	1.000	1.000	$(\xi_{7,-0'33}^9)$	1.000	1.000
$(\xi_{8,0}^9)$	1.000	1.000	$(\xi_{8,0}^9)$	1.000	1.000	$(\xi_{8,0}^9)$	1.000	1.000

Cuadro 17

La información anterior permite obtener los R^+ -expertones, si bien con la finalidad de no reiterar los cálculos, se realizan solamente las operaciones correspondientes al primer período tanto para los compradores como para los vendedores. Así, en concreto se ha obtenido para los compradores los resultados reflejados en el Cuadro 18 y para los vendedores los mostrados en el Cuadro 18.

$4.000 + (6.000 - 4.000)(\cdot)$	$(\xi_{0,0}^9)$	1.000	1.000	R^+ -expertón	$(\xi_{0,0}^9)$	1.000	1.000
	$(\xi_{1,0}^9)$	1.000	1.000		$(\xi_{1,0}^9)$	1.000	1.000
	$(\xi_{2,0}^9)$	1.000	1.000		$(\xi_{2,0}^9)$	1.000	1.000
	$(\xi_{3,-0'33}^9)$	1.000	1.000		$(\xi_{3,-0'33}^9)$	1.000	1.000
	$(\xi_{3,0}^9)$	1.000	1.000		$(\xi_{3,0}^9)$	1.000	1.000
	$(\xi_{4,0}^9)$	1.000	1.000		$(\xi_{4,0}^9)$	1.000	1.000
	$(\xi_{5,0}^9)$	1.000	1.000		$(\xi_{5,0}^9)$	1.000	1.000
	$(\xi_{6,0}^9)$	1.000	1.000		$(\xi_{6,0}^9)$	1.000	1.000
	$(\xi_{7,0}^9)$	1.000	1.000		$(\xi_{7,0}^9)$	1.000	1.000
	$(\xi_{8,0}^9)$	1.000	1.000		$(\xi_{8,0}^9)$	1.000	1.000

Cuadro 18

$4.000 + (6.000 - 4.000)(\cdot)$	$\begin{pmatrix} 9 \\ 0, 0 \end{pmatrix}$	<div><div>1.000</div><div>1.000</div><div>1.000</div><div>1.000</div><div>1.000</div><div>1.000</div><div>1.000</div><div>1.000</div><div>1.000</div></div>	\cdot	$\begin{pmatrix} 9 \\ 0, 0 \end{pmatrix}$	<div><div>1.000</div><div>1.000</div><div>1.000</div><div>1.000</div><div>1.000</div><div>1.000</div><div>1.000</div><div>1.000</div><div>1.000</div></div>
	$\begin{pmatrix} 9 \\ 1, 0 \end{pmatrix}$			$\begin{pmatrix} 9 \\ 1, 0 \end{pmatrix}$	
	$\begin{pmatrix} 9 \\ 2, 0 \end{pmatrix}$			$\begin{pmatrix} 9 \\ 2, 0 \end{pmatrix}$	
	$\begin{pmatrix} 9 \\ 3, 0 \end{pmatrix}$			$\begin{pmatrix} 9 \\ 3, 0 \end{pmatrix}$	
	$\begin{pmatrix} 9 \\ 4, 0 \end{pmatrix}$			$\begin{pmatrix} 9 \\ 4, 0 \end{pmatrix}$	
	$\begin{pmatrix} 9 \\ 5, 0 \end{pmatrix}$			$\begin{pmatrix} 9 \\ 5, 0 \end{pmatrix}$	
	$\begin{pmatrix} 9 \\ 6, 0 \end{pmatrix}$			$\begin{pmatrix} 9 \\ 6, 0 \end{pmatrix}$	
	$\begin{pmatrix} 9 \\ 7, -0'33 \end{pmatrix}$			$\begin{pmatrix} 9 \\ 7, -0'33 \end{pmatrix}$	
	$\begin{pmatrix} 9 \\ 8, 0 \end{pmatrix}$			$\begin{pmatrix} 9 \\ 8, 0 \end{pmatrix}$	
$R^+ \text{-expertón}$					

Cuadro 19

Las esperanzas matemáticas de los expertones anteriores son [0'489, 0'644] y [0'489, 0'711] respectivamente, de forma que se tiene que:

$$\varepsilon \left(B_{\sim 1}^{(C)} \right) = 4.000 + (6.000 - 4.000)(\cdot) [0'489, 0'644] = [4.978, 5.288]$$

$$\varepsilon \left(B_{\sim 1}^{(V)} \right) = 4.000 + (6.000 - 4.000)(\cdot) [0'489, 0'711] = [4.978, 5.422]$$

Para el resto de periodos, las esperanzas matemáticas de los expertones de los compradores son [0'356, 0'556] y [0'150, 0'425] y para los vendedores [0'578, 0'711] y [0'380, 0'580], lo que permite operar en el siguiente sentido:

$$\varepsilon \left(B_{\sim 2}^{(C)} \right) = 3.000 + (6.000 - 3.000)(\cdot) [0'356, 0'556] = [4.068, 4.668]$$

$$\varepsilon \left(B_{\sim 2}^{(V)} \right) = 3.000 + (6.000 - 3.000)(\cdot) [0'578, 0'711] = [4.734, 5.133]$$

$$\varepsilon \left(B_{\sim 3}^{(C)} \right) = 2.000 + (5.000 - 2.000)(\cdot) [0'150, 0'425] = [2.450, 3.275]$$

$$\varepsilon \left(B_{\sim 3}^{(V)} \right) = 2.000 + (5.000 - 2.000)(\cdot) [0'380, 0'580] = [3.140, 3.740]$$

Los procedimientos anteriores permiten obtener valores más aproximados entre las opiniones de compradores y vendedores, reduciéndose la distancia entre los extremos de los intervalos propuestos. Así, en un acercamiento inicial, para el primer periodo, la opinión agregada de los expertos compradores establecen un valor mínimo en 4.978 que, en este caso resulta coincidente con el expresado por la posición vendedora. Por su parte, los vendedores establecen una valoración máxima de 5.422, de forma que se tendría un nuevo intervalo [4.978, 5.288], en el que se encontrarían reflejadas todas las opiniones emitidas por los expertos.

Por tanto, el proceso anterior permite establecer un punto de encuentro que pueda servir de base para el proceso negociador, si bien pudiera ser necesario un nuevo expertizaje para el intervalo obtenido. En este caso, se procederá de forma análoga a lo realizado con los intervalos iniciales, lo que permitirá reducir de nuevo la incertidumbre al disminuir la base del intervalo que se obtendría.

Asimismo si se considerara preciso proceder a la traslación del resultado obtenido sería posible proceder a un proceso de parametrización, de forma similar al realizado en el caso de los tipos de interés.

No obstante lo anterior, al objeto de facilitar la resolución del ejemplo planteado se aceptan como válidos los resultados obtenidos en el primer proceso, utilizando por tanto dicha información para el proceso de cálculo del valor de la empresa.

5. Cálculo del valor total de la empresa

En el primer apartado del presente trabajo se ha establecido como fórmula base para la estimación del valor de la empresa la siguiente:

$$V_e = V_s + (B_1 - i_1 V_s)(1 + i_1)^{-1} + (B_2 - i_2 V_s)(1 + i_1)^{-1}(1 + i_2)^{-1} + \dots + \\ + \dots + (B_n - i_n V_s)(1 + i_1)^{-1}(1 + i_2)^{-1} \dots (1 + i_n)^{-1}$$

La formulación anterior se puede simplificar con la siguiente nomenclatura:

$$I_1^{-1} = (1 + i_1)^{-1}$$

$$I_2^{-1} = (1 + i_1)^{-1}(1 + i_2)^{-1}$$

$$I_3^{-1} = (1 + i_1)^{-1}(1 + i_2)^{-1}(1 + i_3)^{-1}$$

lo que permite formular la expresión del valor de la empresa de la forma siguiente:

$$V_e = \frac{V_s + B_1 \cdot I_1^{-1} + B_2 \cdot I_2^{-1} + B_3 \cdot I_3^{-1}}{1 + i_1 \cdot I_1^{-1} + i_2 \cdot I_2^{-1} + i_3 \cdot I_3^{-1}}$$

Por tanto, para establecer el valor de la empresa es preciso disponer de información sobre el valor sustancial (V_s) que es posible determinar de acuerdo con los criterios comúnmente aceptados. En cualquier caso dicha información es posible determinarla asimismo en términos inciertos, mediante un intervalo que defina el posible valor asignado. No obstante, y a fin de no reiterar procesos de cálculo, a los efectos del presente trabajo se asume que dicho valor es conocido y aceptado en un importe de 3.000 unidades monetarias. Igualmente, la información que se posee por tanto a efectos de proceder a la estimación del valor de la empresa es la siguiente:

$$\begin{array}{lll} V_s = 3.000 & & \\ i_{\sim 1} = [0'04556, 0'04666] & i_{\sim 2} = [0'05552, 0'05781] & i_{\sim 3} = [0'05233, 0'05485] \\ B_{\sim 1} = [4.978, 5.422] & B_{\sim 2} = [4.068, 5.133] & B_{\sim 3} = [2.450, 3.740] \end{array}$$

La información sobre los tipos de interés permiten obtener los correspondientes tipos de actualización:

$$\left(1(+)i_{\sim 1}\right)^{-1} = (1(+)[0'04556, 0'04666])^{-1} = \left[\frac{1}{1'04666}, \frac{1}{1'04556}\right] = [0'9554, 0'9564]$$

$$\left(1(+)i_{\sim 2}\right)^{-1} = (1(+)[0'05552, 0'05781])^{-1} = \left[\frac{1}{1'05781}, \frac{1}{1'05552}\right] = [0'9453, 0'9474]$$

$$\left(1(+)i_{\sim 3}\right)^{-1} = (1(+)[0'05233, 0'05485])^{-1} = \left[\frac{1}{1'05485}, \frac{1}{1'05233}\right] = [0'9480, 0'9503]$$

lo que permite establecer:

$$I_{\sim 1}^{-1} = \left(1(+)i_{\sim 1}\right)^{-1} = [0'9554, 0'9564]$$

$$I_{\sim 2}^{-1} = \left(1(+)\underset{\sim 1}{i}\right)^{-1} \left(\underset{\sim 2}{i}(+)i\right)^{-1} = [0'9031, 0'9061]$$

$$I_{\sim 3}^{-1} = \left(1(+)\underset{\sim 1}{i}\right)^{-1} \left(\underset{\sim 2}{i}(+)i\right)^{-1} \left(\underset{\sim 3}{i}(+)i\right)^{-1} = [0'8561, 0'8610]$$

El proceso de obtención de los tipos de interés y de los beneficios actualizados para cada uno de los periodos de análisis considerado en el ejemplo numérico, se realiza en base a los cálculos que se reflejan a continuación:

$$B_{\sim 1}(\cdot)I_{\sim 1}^{-1} = [4.978, 5.422](\cdot)[0'9554, 0'9564] = [4.756, 5.186]$$

$$B_{\sim 2}(\cdot)I_{\sim 2}^{-1} = [4.068, 5.133](\cdot)[0'9031, 0'9061] = [3.673, 4.651]$$

$$B_{\sim 3}(\cdot)I_{\sim 3}^{-1} = [2.450, 3.740](\cdot)[0'8561, 0'8610] = [2.098, 3.220]$$

$$i_{\sim 1}(\cdot)I_{\sim 1}^{-1} = [0'04556, 0'04666](\cdot)[0'9554, 0'9564] = [0'0435, 0'0446]$$

$$i_{\sim 2}(\cdot)I_{\sim 2}^{-1} = [0'05552, 0'05781](\cdot)[0'9031, 0'9061] = [0'0501, 0'0524]$$

$$i_{\sim 1}(\cdot)I_{\sim 1}^{-1} = [0'05233, 0'05485](\cdot)[0'8561, 0'8610] = [0'0448, 0'0472]$$

De forma que, sustituyendo en la fórmula, se puede obtener finalmente el valor de la empresa para los valores del ejemplo ilustrativo desarrollado, en los términos en los que se ha establecido su cálculo en el presente trabajo:

$$V_e = \frac{3.000(+)[10.527, 13.057]}{1(+)[0'1384, 0'1442]} = \left[\frac{13.527}{1'1442}, \frac{16.057}{1'1384}\right] = [11.822, 14.105]$$

El resultado anterior permite constatar que el beneficio no será inferior a 11.822 ni superará las 14.105 unidades monetarias. La amplitud del intervalo deberá ser objeto de negociación entre las partes, si bien si se considerara necesaria una menor base de incertidumbre sería posible recurrir al contraexpertizaje hasta que dicha incertidumbre pueda ser negociada entre compradores y vendedores.

6. Conclusiones

Los resultados obtenidos con el presente trabajo permiten comprobar en primer término la validez de la representación mediante 2-tuplas para el tratamiento de la información lingüística. Asimismo pone de manifiesto la ventaja de este tipo de representación frente a los modelos basados en el principio de extensión y a los modelos simbólicos en la representación de soluciones obtenidas en contextos multigranulares en el dominio de expresión original utilizado por los expertos o personas que suministran la información para afrontar un proceso de decisión.

Por otra parte, el desarrollo práctico efectuado ha permitido constatar la validez de la técnica de los expertones en su utilización conjunta con la representación mediante 2-tuplas lingüísticas, frente a los operadores tradicionales de agregación de información para este tipo de representación.

En su aplicación al problema de valoración de empresas, la utilización conjunta de ambas técnicas permite el tratamiento de la información suministrada por expertos de cada una de las partes (compradora y vendedora) que pueda facilitar el proceso de consenso en este tipo de operaciones, tratando de modificar lo menos posible la información inicial y procurando facilitar la obtención de este tipo de información en el lenguaje natural inherente a los seres humanos.

7. Referencias Bibliográficas

- Beyth-Marom, R. (1982): "How Probable is Probable?. A Numerical Taxonomy Translation of Verbal Probability Expressions". *Journal of Forecasting*, 1, pp. 257-269.
- Bordogna, G. y Passi, G. (1993): "A Fuzzy Linguistic Approach Generalizing Boolean Information Retrieval: A Model and Its Evaluation". *Journal of the American Society for Information Science*, 44, pp. 70-82.
- Bordogna, G. y Passi, G. (1997): "A Linguistic Modelling of Consensus in Group Decision Making based on OWA Operators". *IEEE Transactions On Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems and Humans*, 27, pp. 126-132.
- Degani, R. y Bortolan, G. (1988): "The problem of Linguistic Approximation in Clinical Decision Making". *International Journal of Approximate Reasoning*, nº 2, pp. 143-162.
- Delgado, M., Verdegay, J.L. y Vila, M.A. (1993): "Linguistic Decision Making Models". *International Journal Intelligent Systems*, 7, pp. 479-492.
- Gil Lafuente, A.M. (2001): "Nuevas estrategias para el análisis financiero en la empresa". Ariel Economía, Barcelona.
- Herrera, F. y Herrera-Viedma, E. (1997): "Aggregation Operators for Linguistic Weighted Information". *IEEE Transactions on System, Man and Cybernetics, Systems and Humans* 5, Vol. 27, pp. 646-656.
- Herrera, F. y Martínez, L. (1999): "A 2-tuple Fuzzy Linguistic Representation Model Based on a Symbolic Translation". *Proceedings EUROFUSE-SIC'99 Conference*, Budapest, pp. 25-28.
- Herrera, F. y Martínez, L. (2000): "A Fusion Approach for Managing Multi-Granularity Linguistic Terms Sets in Decision Making". *Fuzzy Sets and Systems*, nº 114, pp. 43-58.
- Herrera, F.; Herrera-Viedma, E. y Verdegay, J.L. (1996): "A Model of Consensus in Group Decision Making Under Linguistic Assessments". *Fuzzy Sets and Systems*, nº 79, pp. 73-87.
- Kaufmann, A. (1987): "Les Expertons". Hermes, París.
- Kaufmann, A. y Gil Aluja, J. (1993): "Técnicas especiales para la gestión de expertos". Milladoiro, Vigo.
- Kaufmann, A. y Gil Aluja, J. (1992): "Técnicas de Gestión de Empresa. Previsiones, Decisiones y Estrategias". Pirámide, Madrid.
- Klir, G.J. y Yuan, B. (1995): "Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications". Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, NJ.
- Martínez, L. (1999): "Un Nuevo Modelo de Representación de Información Lingüística basado en 2-tuplas para la Agregación de Preferencias Lingüísticas". *Tesis Doctoral*. Universidad de Granada.

- Mendaña Cuervo, C. y López González, E. (2001): "Agregación de información lingüística mediante un modelo híbrido de 2-tuplas lingüísticas y expertones". *VIII Congreso de la Asociación Internacional de Gestión y Economía Fuzzy (SIGEF'2001)*, Nápoles (Italia).
- Roubens, M. (1997): "Fuzzy Sets and Decision Analysis". *Fuzzy Sets and Systems*, 90, pp. 199-206.
- Tong, M. y Bonissone, P.P. (1980): "A Linguistic Approach to Decision Making with Fuzzy Sets". *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 10, pp. 716-723.
- Yager, R.R. (1992): "Fuzzy Screening Systems". Incluido en LOWEN, R. (ed.): "*Fuzzy Logic: State of the Art*", Kluwer Academic Publishers, Boston, pp. 251-261.
- Yager, R.R. (1995): "An Approach to Ordinal Decision Making". *International Journal Approximate Reasoning*, 12, pp. 237-261.
- Yager, R.R. (1998): "Fusion of Ordinal Information using Weighted Median Aggregation". *International Journal of Approximate Reasoning*, nº 18, pp. 32-35.
- Yager, R.R. y Filev, D.P. (1993): "Parameterized And-Like and Or-Like OWA Operators". *International Journal of General Systems*, nº 22, pp. 297-316.
- Zadeh, L.A. (1975): "The Concept of a Linguistic Variable and its Applications to Approximate reasoning". Parte I, *Information Sciences* 8, pp. 199-249, Parte II, *Information Sciences* 8, pp. 301-357, Parte III, *Information Sciences* 9, pp. 43-80.
- Zadeh, L.A. (1983): "A Computational Approach to Fuzzy Quantifiers in Natural Languages". *Computers and Mathematics with Applications*, 9, pp. 149-184.